

Feuille 5: Théorème central limite et intervalles de confiance

L3 Maths Appliquées
lagache@biologie.ens.fr

26 Fevrier 2008

1 Exercice 0

On souhaite appliquer le TCL à $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i$ où les X_i sont iid d'espérance m et de variance σ inconnues. Montrer que si on connaît $\bar{\sigma}$ un majorant de σ , alors on peut construire un intervalle de confiance pour m de niveau de confiance asymptotique $1 - \alpha$ sans avoir besoin de l'estimateur empirique $S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \bar{X}_n)^2}$ introduit en cours.

2 Exercice 1

Soit $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ une famille de variables aléatoires réelles iid suivant la loi uniforme $\mathbf{1}_{[a;b]}$. On considère que $[a;b]$ est de la forme $[m - \frac{\theta}{2}; m + \frac{\theta}{2}]$ où θ est un paramètre réel connu. Donner un intervalle de confiance pour m de niveau asymptotique 95%.

3 Exercice 2

On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée et on définit la suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ telle que $X_i = 1$ si on obtient pile au i^{eme} lancer et $X_i = 0$ sinon. On note $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$.

1. Exprimer l'évènement "la fréquence d'apparition de piles pour les n premières parties est comprise entre 0.45 et 0.55" à l'aide de S_n .
2. Déterminer le nombre de parties n nécessaire pour que l'on puisse affirmer que cette fréquence d'apparition est comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité égale à 90% et cela par deux méthodes :
 - à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
 - Avec le TCL (On rappelle que le quantile à 95%, $q_{0.95}$ vaut approximativement 1.645).
3. Comparer les résultats obtenus.

4 Exercice 3

4.1 Partie 1

Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p . Que vaut sa variance et pour quelle valeur de p est-elle maximale ? Que vaut-elle alors ?

4.2 Partie 2

Aus Etats-Unis, sur 4 000 000 de naissances annuelles, on observe un ratio de 1048 garçons pour 1000 filles. Donner un intervalle de confiance à 99% pour la probabilité p qu'un bébé soit un garçon. Que pensez vous de l'hypothèse d'équilibre des naissances : $p=0.5$?

4.3 Partie 3

Lors du second tour de l'élection présidentielle, on effectue un sondage sur 1 000 personnes. Le candidat A recueille $a\%$ (a proche de 50) des suffrages des personnes interrogées. Donner un intervalle de confiance à 95% du score S_A du candidat A au second tour. A partir de quelle valeur de $|a - 50|$ connaît-on le résultat de l'élection à 99% de certitude ?