

Feuille 4: Couple de variables aléatoires

L3 Maths Appliquées
lagache@biologie.ens.fr

28 Mars 2009

1 Exercice 1

Calculer les densités marginales des v.a.r X et Y , quand le couple (X, Y) a la densité suivante :

- $f(x, y) = e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{[0; \infty[\times]0; \infty[)}(x, y)$
- $f(x, y) = 2e^{-(x+y)} \mathbf{1}_{\{(x, y): 0 < x < y\}}$

2 Exercice 2

Soit le couple de v.a.r. (X, Y) ayant pour densité $f(x, y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)}$.

- Quelle doit-être la valeur de c pour que f soit bien une densité de probabilité ?
- Densités marginale de X et de Y ?

3 Exercice 3

Méthode de simulation de Box-Muller.

4 Exercice 4

Soit le couple de va réelles (X, Y) de densité $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \mathbf{1}_{\{x>0\}} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$.

- Déterminer la loi du couple $(Z, W) = (X + Y, X - Y)$. Z et W sont-elles indépendantes ? Déterminer leurs lois marginales.
- X et Y sont elles indédendantes ?

5 Exercice 5

Soient X et Y deux lois normales centrées réduites et $\sigma \in]0; 1[$ un réel fixé. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes. Soit $Z = \sqrt{\sigma}X + \sqrt{1 - \sigma}Y$.

- Quelles sont les espérances et variances de Z ?
- Quelle est la loi de Z ? (Indication : on cherchera la loi du couple (S, X) avant d'en déduire la loi marginale de S).

6 Exercice 6

Soit le couple de va réelles (X, Y) et de densité f .

- Déterminer la loi de $S = X + Y$. (On considérera le couple (S, X)).
- Même question mais avec X et Y indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y .
- Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de va i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre λ . On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
 - Quelle est la loi de S_2 ?
 - Montrer par récurrence que S_n a pour densité

$$f_n(x) = c_n x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

où c_n est une constante dont on déterminera la valeur.

7 Exercice 7

Soit le couple (X, Y) de densité

$$f(x, y) = c \frac{e^{-(y+\frac{x}{y})}}{y} \mathbf{1}_{\{x>0\}} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$$

- Calculer c
- Quelle est la loi marginale de Y ?
- Sans calculer la loi marginale de X , peut-on répondre à la question : X et Y sont-elles indépendantes ?
- Calculer directement l'espérance et la variance de X à partir de la loi jointe du couple.