Feuille 2: Probabilités conditionnelles et indépendance

L3 Maths Appliquées
lagache@biologie.ens.fr

17 Mars 2009

1 Exercice 1

La famille Flanders a 2 enfants dont l'un est une fille.

1. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon?
2. On sait que la fille est l'ainé. Quelle est la probabilité que le cadet soit un garçon?

2 Exercice 2

Parmi 10 pièces mécaniques, 4 sont défectueuses. On prend successivement et sans remise 2 pièces. Quelle est la probabilité que ces deux pièces ne soient pas défectueuses?

3 Exercice 3

A propose à B le jeu suivant: tirer r cartes dans un jeu de 52 cartes, si l'as de pique figure dans ces r cartes, B gagne (et sinon il perd!).

1. Quelle est la probabilité que A gagne?
2. A veut tricher: il subtilise k cartes au paquet avant de tirer ses r cartes (avec k tel que $k + r < 52$). Quelle est alors la probabilité que A gagne? Etait ce judicieux de tricher?

4 Exercice 4

Trois chasseurs tirent sur un éléphant. L'éléphant est abattu de deux balles. Les chasseurs voudraient bien savoir qui, d'entre eux, a tué la bête. Sachant qu'à chaque tir, ils ont respectivement, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ de chances de toucher leur cible, donner leur probabilité respective d'avoir raté l'animal.

5 Exercice 5: urne de Polya

Une urne contient b boules bleues et r boules rouges. Une boule est tirée au hasard; on la replace ensuite dans l'urne en ajoutant d boules de la même couleur. Quelle est la probabilité:

1. que la seconde boule tirée soit rouge?
2. que la première boule soit rouge sachant que la seconde est rouge?

6 Exercice 6

On se propose de démontrer par une méthode probabiliste l'égalité:

$$\sum_{p+q=n, p\geq 1, q\geq 1} pq = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

Pour cela considérons $n+1$ boules numérotées de 1 à $n+1$, parmi lesquelles on tire successivement et sans remise 3 boules.

Soit A l'événement: "les numéros obtenus successivement sont croissants".

- Calculer, pour tout (i,j,k) tels que $1 \leq i < j < k \leq n+1$, la probabilité conditionnelle de A sachant que l'ensemble des 3 numéros obtenus est (i,j,k).
- En déduire que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$.
- Montrer par un calcul direct que $\mathbf{P}(A) = \frac{\sum_{p+q=n, p\geq 1, q\geq 1} pq}{(n+1)n(n-1)}$. Conclure.
- Retrouver cette identité par un calcul direct.

7 Exercice 7

Soient A, B et C trois événements mutuellements indépendants.

- Prouver que A^c est indépendant de $B \cup C$.
- On suppose que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(C) > 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \cap B$ et $A \cap C$ soient indépendants.

8 Exercice 8

Montrer par un contre-exemple que deux événements indépendants A et B ne le sont pas nécessairement conditionnellement à un troisième événement C avec $\mathbf{P}(C) > 0$, c'est à dire dans $(\Omega, \mathbf{P}_C)$ $\mathbf{P}_C = \mathbf{P}(.|C)$.

9 Exercice 9

Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p et dont la réunion soit Ω tout entier?

10 Exercice 10: Règle succession de Laplace

Une boite contient $k+1$ pièces numérotées de 0 à k. Lorsque la i^{eme} pièce est lancée, $0 \leq i \leq k$, la probabilité qu'elle a de donner Pile est de $\frac{i}{k}$. On tire au hasard une pièce dans l'urne pour la jeter ensuite un grand nombre de fois et on suppose alors que le choix de la pièce à lancer étant fait, les jets sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité conditionnelle $p_{k,n}$ que le $(n+1)^{eme}$ lancer donne Pile sachant que les n premiers l'ont fait? Quelle est la limite de $p_{k,n}$ quand k tend vers l'infini?

2. Sachant que les n premiers lancers ont donné Pile, montrer que la probabilité conditionnelle que les m suivant fassent de même tend, pour k tendant vers l'infini, vers $\frac{n+1}{n+m+1}$.

3. On suppose que les n premiers jets ont donné r Piles et $n-r$ Faces. Montrer que la probabilité conditionnelle que le $(n+1)^{eme}$ donne Pile tend, pour k tendant vers l'infini, vers $\frac{r+1}{n+2}$.

   Indication: on pourra utiliser l'identité:

   $$\int_0^1 y^n(1-y)^m dy = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}$$

4. Quelle est la probabilité que la i^{eme} pièce ait été tirée si les n premiers jets ont donné Pile?

5. Peut-on dire que les résultats des jets sont indépendants ?