Feuille 2: Variables aléatoires réelles et moments

L3 Maths Appliquées
lagache@biologie.ens.fr

19 Fevrier 2009

1 Exercice 1

Soit Φ un angle uniforméméent réparti sur $[0; \frac{\pi}{2})$. Quelle est la fonction de répartition de $Y = tan(\Phi)$? Même question lorsque Φ est uniformément réparti dans $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

2 Exercice 2

Soit X une v.a. uniformément répartie sur $[0; R]$. Quelle est la fonction de répartition de $Z = \sqrt{R^2 - X^2}$?

3 Exercice 3

La citerne à essence d'une station service est remplie chaque lundi matin. La vente hebdomadaire d'essence -en milliers de litres- réalisée par la station service est une v.a.r. de densité:

$$f(x) = 5(1-x)^4 \mathbf{1}_{[0;1]}(x)$$

. Quelle doit être la capacité minimale de la citerne pour que la probabilité que la station soit à cours d'essence au cours de la semaine soit inférieure à 1% ?

4 Exercice 4

La durée de vie d'un composant éléctronique est une v.a.r. X de densité:

$$f(x) = \frac{10}{x^2} \mathbf{1}_{[x>10]}$$

1. Calculer $\mathbf{P}\{X > 20\}$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Quelle est la probabilité que parmi 6 composants éléctroniques de ce type, trois au moins fonctionnent plus de 15 heures? Préciser les hypothèses faites pour résoudre cette question.

5 Exercice 5

1. Soit X une v.a. exponentielle de paramètre λ. Quelle est la loi de X^2? Quelle est la loi de $V = X\mathbf{1}_{0\leq X\leq 1} + 2X\mathbf{1}_{X>1}$?
2. Soit X une v.a. de Cauchy de paramètre $a > 0$. Quelle est la loi de $Y = \frac{1}{X}$?
3. Soit U une v.a. uniforme sur $[0; 1]$. Quelle est la loi de $Z = exp(U)$?
4. Soit W une v.a. uniforme sur $[-1; 1]$. Quelle est la loi de $Z = |W|$?

6 Exercice 6

1. Calculer l'espérance de la loi binomiale de paramètre $0 \leq p \leq 1$.
2. Calculer l'espérance de $Y = e^{\lambda X^2}$ où X suit une loi normale centrée réduite.

7 Exercice 7

La durée de vie (en jours) de la mouche Tsé-Tsé peut être modélisée par une variable aléatoire continue T de densité

$$f(t) = \lambda t^2 e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{t>0}$$

où λ et α sont deux constantes réelles strictement positives. On sait que l'espérance de vie de la mouche est de 50 jours. En déduire les valeurs de α et λ.

8 Exercice 8

Un appareil fonctionne un temps aléatoire T_1 et tombe en panne. On le répare pendant une durée t_0 donnée. Puis il retombe en panne au bout d'un temps T_2, on le répare etc ....

On suppose les T_i i.i.d. selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit Z_n le temps aléatoire entre la n^{eme} panne et la $n + 1^{eme}$.

1. Calculer la fonction de répartition de Z_n.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$.
3. Calculer $\mathbf{P}\{Z_n > 2t_0\}$.

9 Exercice 9

Soit X une v.a.r. absolument continue, et F sa fonction de répartition. On dit que le réel m est une médiane de X si $F(m) = \frac{1}{2}$.

1. Trouver une médiane de X si :

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ
- la densité de X est une fonction paire
- X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. On suppose que X admet pour densité f telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{a}{2|x|^{a+1}} \mathbf{1}_{|x|>1},$$

avec $a > 0$.

- Vérifier que f est une densité de probabilité.
- Montrer que X admet une infinité de médianes.

3. On suppose ici que X suit la loi de Weibull de densité :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} \mathbf{1}_{]0;+\infty[}(x), \quad (1)$$

avec λ et c deux réels fixés strictement positifs.

- quelle est la loi de la v.a.r. $Y = X^c$ (par deux manières différentes).
- En déduire une médiane de X (utiliser le (1)).

10 Exercice 10

Calculer les variances des lois suivantes :

- Loi exponentielle de paramètre λ (densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$)
- Loi uniforme sur $[a; b]$
- Loi Binomiale $Bin(p, n)$

Pour la loi binomiale, retrouver le résultat en considérant que si X suit une loi binomiale $Bin(p, n)$ alors $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où Y_i sont des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p , $B(p)$.

11 Exercice 11: Inegalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient $(X_i)_{i=1}^{i=n}$ des variables aléatoires d'éspérance nulle et telles que $\mathbf{E}\{X_i X_j\} = 0$ si $i \neq j$ et σ^2 sinon. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} X_i| \geq t\} \leq \frac{\sigma^2}{nt^2}$.

A présent, on considère n personnes sondées. Celles-ci habitent plus ou moins loin du lieu du sondage et cette distance suit la loi X_i. Les X_i sont identiquement distribuées selon une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. A partir de combien de personnes sondées, la distance moyenne est-t-elle inférieure à 0.5 avec une probabilité de 99% ?