Feuille 1

L3 Maths Appliquées
lagache@biologie.ens.fr

27 Janvier 2009

1 Combinatoire

1.1 Exercice 1

A la chambre des députés d'un pays composé de 100 départements, chaque département est représenté par 2 députés.

1. Combien peut-on former de commissions- d'un nombre arbitraire de 1 à 200- de compositions différentes?
2. Combien peut-on former de commissions de 100 membres dans lesquelles tous les départements sont représentés?

1.2 Exercice 2

On veut distribuer 7 tablettes de chocolat à 4 enfants, de sorte que chaque enfant ait au moins une tablette. De combien de façons peut-on réaliser cette distribution (les tablettes sont indiscernables) ?

1.3 Exercice 3

Une cordée de 7 montagnards comprend 3 guides et 4 clients. De combien de manières différentes peut-on disposer ces 7 personnes en file (avec donc un certain ordre), sachant qu'obligatoirement les première et dernière personnes de la file sont des guides ?

1.4 Exercice 4

Douze personnes ont 3 voitures à leur disposition de resp. 6, 4 et 2 places. De combien de façons peut-on affecter ces 12 personnes à ces 3 voitures, en supposant:

1. qu'elles ont toutes le permis de conduire ?
2. que seules 4 d'entre elles ont le permis?

2 Probabilités élémentaires

2.1 Exercice 0

On tire un nombre réel au hasard entre 0 et 1. Montrer que le résultat est presque sûrement un irrationnel.

2.2 Exercice 1: Formule de Poincaré

Soient $(A_i)_{i=1..n}$, des événements. Montrer par récurrence la formule de Poincaré:

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} p_k$$

avec $p_k = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$ On pourra commencer par montrer que:

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) + \mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P} \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \right).$$

2.3 Exercice 2: L'indicatrice d'Euler

On choisit au hasard un entier dans $\{1..n\}$, tous les choix étant équiprobables. Soit $1 \leq p \leq n$, on note A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p ".

1. Calculer $\mathbf{P}(A_p)$ lorsque p divise n .
2. Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n . Que représente l'événement $(A_{p_1} \cup A_{p_2} \dots \cup A_{p_r})^c$.
3. On note $\phi(n)$ le nombre d'entiers strictement inférieurs à n et premiers avec n . Montrer à l'aide de la formule de Poincaré que l'on a:

$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

2.4 Exercice 3: Le facteur distrait

Un facteur dispose de n lettres à distribuer à n destinataires distincts. Il fait la distribution au hasard parmi ces n personnes (chaque personne reçoit exactement une lettre). $\forall m, 0 \leq m \leq n$, on note B_m l'événement "exactement m lettres sont parvenus aux bons destinataires".

1. Calculer la probabilité de B_0 . Pour cela, on pourra dans un premier temps calculer le cardinal de $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ où A_i représente l'ensemble des distributions pour lesquelles la $i^{\text{ème}}$ personne reçoit la lettre qui lui était destinée, et utiliser ensuite la formule de Poincaré.

Donner une approximation de B_0 pour n grand.

2. Pour $m \geq 1$, que vaut la probabilité de l'événement B_m ? En calculer la limite pour n tendant vers l'infini.

2.5 Exercice 4

Dans une classe de $n \leq 365$ élèves, quelle est la probabilité que 2 élèves au moins soient nés le même jour?

2.6 Exercice 5

Une loterie contient 100 billets parmi lesquels:

- 1 billet gagne un lot de 10000 euros.
- 5 billets gagnent un lot de 3000 euros.
- 10 billets gagnent un lot de 1000 euros.

1. Quelle est la probabilité qu'un acheteur de 3 billets gagne exactement 3000 euros?
2. Quelle est la probabilité qu'un acheteur de 3 billets gagne au moins 3000 euros?

2.7 Exercice 6

Une urne contient 20 boules identiques numérotées de 1 à 20. On tire au hasard 3 boules sans remise.

1. Quelle est la probabilité qu'une de ces trois boules, au moins, porte un numéro supérieur ou égal à 17?
2. Quelle est la probabilité que le produit des 3 boules fasse 60?
3. (bonus!) Quelle est la probabilité que l'on ait deux numéros consécutifs (par exemple (2,3,4) ou (3,4,8)) ?

2.8 Exercice 7

On fixe un entier n dans $\{2, \dots, 20\}$. Deux joueurs jouent au jeu suivant: " On jette deux dés équilibrés. Si la somme des points obtenus est strictement supérieure à n , le joueur A est gagnant, sinon c'est B qui gagne."

1. $\forall k \in \{2 \dots 12\}$, on désigne par A_k l'événement "la somme des points vaut k ". Calculer la probabilité de A_k , pour tout $k \in \{2 \dots 12\}$.
2. Exprimer l'événement "le joueur A gagne" à l'aide des événements A_k .
3. Quelle doit être la valeur minimale de n pour que le joueur A gagne avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

3 Fonctions de répartition

3.1 Exercice 1

On tire sur une cible de rayon 30 cm, divisée en trois anneaux régulièrement répartis de rayon 10 cm chacun. On gagne 10 points quand on touche la zone centrale, 20 pour la zone intermédiaire et 30 quand on touche la zone périphérique.

(1) On suppose que l'on touche à coup sûr la cible et que la probabilité de toucher la zone A est proportionnelle à son aire :

$$P(A) = \frac{\text{Aire}(A)}{\text{Aire}(cible)}$$

X est la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués sur un tire. Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

(2) On suppose toujours que l'on touche la cible à coup sûr mais à présent, le nombre de points est donné par la distance au centre. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de points pour un lancer. Donner la fonction de répartition de Y.

(3) On suppose de plus, à présent que l'on touche la cible avec une probabilité égale à $1-p$, et que si on la rate, on marque 40 points. On note Z la v.a. représentant le nombre de points sur un lancer. Donner la fonction de répartition de Z.

3.2 Exercice 2

Soient $a < b$, deux réels fixés. On dit qu'une v.a.r. X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ si elle possède les propriétés suivantes:

- presque sûrement, X est à valeurs dans $[a; b]$
- pour tout intervalle I inclus dans $[a; b]$, la probabilité $\mathbf{P}(X \in I)$ est proportionnelle à la longueur de l'intervalle I .

Soient deux réels c, d tels que $a \leq c \leq d \leq b$, que vaut $\mathbf{P}(X \in [c; d])$? Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable X .

3.3 Exercice 3

Pour chacune des applications définies ci-dessous, prouver s'il s'agit ou non de la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbf{R}$:

1. $f_1(x) = 1 - \exp(-2x)$ si $x > 0$, $f_1(x) = 0$ sinon.
2. $f_2(x) = 0$ si $x < 0$, $f_2(x) = \frac{1}{3}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f_2(x) = 1$ dans les autres cas.
3. $f_3(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f_3(x) = \frac{1}{3}$ si $0 < x \leq 1$ et $f_3(x) = 1$ dans les autres cas.
4. $f_4(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$.

3.4 Exercice 4

On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée et l'on appelle X le nombre de piles qui sont apparus avant le premier face. On rappelle le résultat suivant établi en cours:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X = n) = P_X(\{n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La loi P_X s'appelle la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Calculer sa fonction de répartition F_X