

# Projets scilab

L3 Maths Appliquées  
lagache@biologie.ens.fr

02 Avril 2009

**REMARQUE:** quelques résultats importants concernant le théorème central limite et les intervalles de confiance sont rappelés dans la partie 3.

Lemme: Etant donnée une variable aléatoire réelle  $X$ , de fonction de répartition donnée  $F$ , nous définissons la fonction quantile de  $X$  :

$$\forall x \in ]0; 1[, F^{-1}(x) = \inf\{t \in \mathbf{R}, F(t) \geq x\}$$

Alors, pour une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme sur  $]0; 1[$ ,  $F^{-1}(U)$  suit la loi de  $X$  : autrement dit, si  $u$  est une réalisation de la loi uniforme,  $F^{-1}(u)$  est une réalisation de la variable  $X$ .

## 1 Projet 1: Calcul de prix d'un Call

En finance de marché, on peut acheter des calls  $C(S, T, K)$ ; ce sont des options d'achat pour un actif (une action par exemple) d'une valeur aléatoire  $(S(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ , à l'échéance  $T$  et à un prix d'exercice (ou *strike*)  $K$ . En clair, à l'instant  $t_0$  j'achète ce call  $C$  et au temps  $T$ , celui-ci me permettra d'acheter au prix  $K$  l'actif  $S$  (alors de valeur  $S(T)$ ). Alors deux cas de figure s'offrent à moi, soit  $S(T) < K$  et il est donc stupide d'exercer mon option, soit  $S(T) \geq K$  et alors j'achète  $S$  au prix  $K$ . Le problème est maintenant de fixer le prix du call  $C$  à l'instant  $t_0$ . Nous nous proposons ici de le déterminer empiriquement grâce à des simulations.

Pour la dynamique temporelle de  $S(t)$ , nous adoptons le modèle de Black-Scholes simplifié suivant:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)dW_t \\ S(t_0) &= S_0 \end{aligned}$$

où  $dW_t$  est un incrément Brownien. Nous n'entrerons pas dans les détails mais cela signifie que, pour un pas de temps  $dt$ , on a:

$$S(t + dt) = S(t)(1 + u(dt))$$

où  $u(dt)$  est la réalisation d'une loi normale de variance  $dt$ :  $u \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$  avec  $\mathcal{N}(0, 1)$  la loi normale centrée réduite usuelle.

Avec ce modèle calculer empiriquement (1,000 réalisations) le prix du call:  $\mathbf{E}\{(S(T)-K)_+\}$  où  $(S(T)-K)_+ = \sup((S_T - K), 0)$ . On prendra les paramètres suivants:  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ ,  $T = 1$  et  $dt = 0,01$ . On vérifiera aussi, en utilisant la variance empirique, que le prix trouvé se trouve dans un intervalle de confiance à 99% autour du prix  $m$  théorique donné par:

$$m = S_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)$$

avec  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite. Pour calculer  $\Phi(x)$  sous scilab, on utilisera la fonction **cdfnor**:

$$[P, Q] = \text{cdfnor}("PQ", x, \mu, \sigma)$$

renvoie dans  $P$  ( $Q = 1 - P$ ) la fonction de répartition d'une gaussienne (moyenne  $\mu$ , écart-type  $\alpha$ ) au point  $x$ . Enfin, on a :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \frac{1}{2}T \right) \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{T}. \end{aligned}$$

On testera l'influence des différents paramètres sur le prix du call.

## 2 Projet 2: Calcul de prix d'un Put

En finance de marché, on peut acheter des puts  $P(S, T, K)$ ; ce sont des options de vente pour un actif (une action par exemple) d'une valeur aléatoire  $(S(t))_{t_0 \leq t \leq T}$ , à l'échéance  $T$  et à un prix d'exercice (ou *strike*)  $K$ . En clair, à l'instant  $t_0$  j'achète ce put  $P$  et au temps  $T$ , celui-ci me permettra de vendre au prix  $K$  l'actif  $S$  (alors de valeur  $S(T)$ ). Alors deux cas de figure s'offrent à moi, soit  $S(T) > K$  et il est donc stupide d'exercer mon option, soit  $S(T) \leq K$  et alors je vends  $S$  au prix  $K$ . Le problème est maintenant de fixer le prix du put  $P$  à l'instant  $t_0$ . Nous nous proposons ici de le déterminer empiriquement grâce à des simulations.

Pour la dynamique temporelle de  $S(t)$ , nous adoptons le modèle de Black-Scholes simplifié suivant:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)dW_t \\ S(t_0) &= S_0 \end{aligned}$$

où  $dW_t$  est un incrément Brownien. Nous n'entrerons pas dans les détails mais cela signifie que, pour un pas de temps  $dt$ , on a:

$$S(t + dt) = S(t)(1 + u(dt))$$

où  $u(dt)$  est la réalisation d'une loi normale de variance  $dt$ :  $u \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0, 1)$  avec  $\mathcal{N}(0, 1)$  la loi normale centrée réduite usuelle.

Avec ce modèle calculer empiriquement (1,000 réalisations) le prix du put:  $\mathbf{E}\{(K - S(T))_+\}$  où  $(K - S(T))_+ = \sup((K - S(T)), 0)$ . On prendra les paramètres suivants:  $S_0 = 100$ ,  $K = 110$ ,  $T = 1$  et  $dt = 0,01$ . On vérifiera aussi, en utilisant la variance empirique, que le prix trouvé se trouve dans un intervalle de confiance à 99% autour du prix  $m$  théorique donné par:

$$m = K\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1)$$

avec  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$  la fonction de répartition de la loi normal centrée réduite. Pour calculer  $\Phi(x)$  sous scilab, on utilisera la fonction **cdfnor**:

$$[P, Q] = \text{cdfnor}("PQ", x, \mu, \sigma)$$

renvoit dans  $P$  ( $Q = 1 - P$ ) la fonction de répartition d'une gaussienne (moyenne  $\mu$ , écart-type  $\alpha$ ) au point  $x$ . Enfin, on a :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{S_0}{K} \right) + \frac{1}{2}T \right) \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{T}. \end{aligned}$$

On testera l'influence des différents paramètres sur le prix du Put.

### 3 Projet 3: Calcul d'intégrales par méthode de Monte Carlo

#### 3.1 Fondements de la méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo vise à interpréter une intégrale comme l'espérance d'une variable adéquate. Par exemple, une intégrale de la forme :

$$\int_{]0,1[^d} f(x)dx, \quad f \text{ étant intégrable,}$$

peut s'interpréter comme  $\mathbf{E}f(U)$ , où  $U$  est une variable vectorielle de loi uniforme sur  $]0,1[^d$ . Dans ce contexte, la loi des grands des nombres assure que pour une suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  de variables vectorielles indépendantes de loi uniforme sur  $]0,1[^d$ , avec probabilité 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) = \mathbf{E}(f(U)).$$

Attention, bien que  $U$  soit à valeurs vectorielles,  $f(U)$  est une variable réelle. La loi des grands nombres s'applique donc sans difficultés.

Plus généralement, une intégrale de la forme :

$$\int_{\mathbf{R}^d} g(x)f(x)dx, \quad \text{correctement définie,}$$

avec  $f$  densité sur  $\mathbf{R}^d$ , peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{E}(g(X))$ , où  $X$  désigne une variable vectorielle dont la loi admet  $f$  pour densité. Là encore, la loi des grands nombres assure que pour une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables indépendantes de même loi que  $X$ , avec probabilité 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \rightarrow \mathbf{E}(g(X)).$$

Dans la suite, nous noterons  $\bar{G}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)$ . Le théorème central limite nous assure que, pour un tirage  $(x_1, \dots, x_n)$  donné, l'ensemble :

$$\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) - 1,960 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) + 1,960 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

est un intervalle de confiance asymptotique de  $\mathbf{E}(g(X))$  de niveau de confiance 0,95.

On en déduit le point suivant :

1. Il est crucial de minimiser la variance  $\sigma$ . Si l'intégrale admet plusieurs écritures de type  $\mathbf{E}(g(X))$ , on aura tout intérêt à choisir la forme assurant la plus faible variance.

La stratégie est alors de remplacer la variance par la variance empirique, donnée par :

$$\forall n \geq 2, \bar{\Sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (g(X_k) - \bar{G}_n)^2.$$

Dans ce contexte, pour un tirage  $(x_1, \dots, x_n)$  donné, conduisant à une réalisation notée  $\bar{g}_n$  de  $\bar{G}_n$  et une réalisation notée  $\bar{\sigma}_n$  de  $\bar{\Sigma}_n$ , l'ensemble :

$$\left[ \bar{g}_n - 1,960 \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \bar{g}_n + 1,960 \frac{\bar{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right],$$

est un intervalle de confiance asymptotique de  $\mathbf{E}(g(X))$  de niveau de confiance 0,95.

**Comment Opérer de Façon Pratique?** Désignons par  $\mathbf{x}=(\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n))$  une réalisation d'un  $n$ -échantillon de même loi que  $X$  obtenue par simulation, et calculons le vecteur  $\mathbf{v}=(\mathbf{g}(\mathbf{x}(1)), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{x}(n)))$ . Attention, si  $X$  est une variable vectorielle,  $\mathbf{x}(1)$  est un vecteur (par exemple colonne)! De sorte que  $(\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(n))$  s'écrit en **Scilab** comme une matrice. En revanche,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(1))$  est réel, de sorte que  $\mathbf{v}$  est un vecteur à  $n$  coordonnées.

Le calcul de la moyenne empirique, *i.e.*  $n^{-1} \sum_{i=1}^n g(x_i)$ , s'obtient à l'aide de l'instruction `mean(v)`, et l'écart-type empirique, ou encore la racine de la variance empirique, *i.e.* la racine de  $(n-1)^{-1} \sum_{k=1}^n (g(x_k) - \bar{g}_n)^2$ , s'obtient en appelant `st_deviation(v)`.

Dans la suite, on choisira  $n = 10^4$ .

### 3.2 La Fonctions Gamma

Rappelons que la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par la formule:

$$\forall s > 0, \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \exp(-x) dx.$$

Une simple intégration par parties permet de démontrer que pour  $s \geq 0$ ,  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ . En particulier, en remarquant que  $\Gamma(1) = 1$ , il vient  $\forall N \in \mathbf{N}^*, \Gamma(N) = (N-1)!$

La fonction  $\Gamma$  est codée sous **Scilab**: instruction `gamma`. Nous allons essayer de

retrouver quelques-unes de ses valeurs par la méthode Monte-Carlo.

Commençons par remarquer que la fonction  $\Gamma$  se met aisément sous la forme d'une espérance:  $\Gamma(s) = \mathbf{E}(X^{s-1})$ , où  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre 1. Un simple calcul montre que  $X^{s-1}$  est de carré intégrable pour  $s > 1/2$ :

$$\mathbf{E}(X^{2s-2}) = \int_0^{+\infty} x^{2s-2} \exp(-x) dx.$$

Mettre en place une fonction `gammamc(n, s)` permettant de calculer par méthode de Monte-Carlo une valeur approchée de  $\Gamma(s)$  à partir de la simulation d'un  $n$ -échantillon de loi exponentielle de paramètre 1, le réel  $s$  étant supposé supérieur strictement à  $1/2$ . Accompagner le résultat d'un intervalle de confiance. Que se passe-t-il lorsque  $s$  croît quant à la qualité de l'approximation (choisir  $s = 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2$ ) ?

L'explication tient bien sûr à la variance de  $X^{s-1}$  pour  $s$  grand. Celle-ci est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X^{s-1}) &= \mathbf{E}(X^{2s-2}) - (\mathbf{E}(X^{s-1}))^2 \\ &= \int_0^{+\infty} x^{2s-2} \exp(-x) dx - \left( \int_0^{+\infty} x^{s-1} \exp(-x) dx \right)^2 \\ &= \Gamma(2s-1) - \Gamma(s)^2. \end{aligned}$$

Par exemple, lorsque  $s = N \in \mathbf{N}^*$ , il vient:  $\mathbf{V}(X^{N-1}) = (2N-2)! - ((N-1)!)^2$ . Pour  $N$  grand, ceci est équivalent à  $(2N-2)!$ . La variance explose donc très rapidement pour  $N$  grand de sorte qu'il devient impossible d'obtenir un intervalle de confiance de qualité satisfaisante.

Il s'agit de chercher une autre écriture de  $\Gamma(s)$ . Par exemple:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= 2 \int_0^{+\infty} x^{s-1} \exp(-x/2) \left( \frac{1}{2} \exp(-x/2) \right) dx \\ &= 2 \mathbf{E}(Y^{s-1} \exp(-Y/2)), \end{aligned}$$

où  $Y$  suit une loi exponentielle de paramètre  $1/2$ . Là encore,  $2Y^{s-1} \exp(-Y/2)$  est de carré intégrable pour  $s > 1/2$ :

$$4 \mathbf{E}(Y^{2s-2} \exp(-Y)) = 2 \int_0^{+\infty} x^{2s-2} \exp(-3x/2) dx.$$

Examinons la variance de  $2Y^{s-1} \exp(-Y/2)$ :

$$\mathbf{V}(2Y^{s-1} \exp(-Y/2)) = \mathbf{E}(4Y^{2s-2} \exp(-Y)) - (\mathbf{E}(2Y^{s-1} \exp(-Y/2)))^2.$$

En remarquant l'égalité  $\mathbf{E}(2Y^{s-1} \exp(-Y/2)) = \mathbf{E}(X^{s-1})$ , il s'agit de comparer  $\mathbf{E}(4Y^{2s-2} \exp(-Y))$  et  $\mathbf{E}(X^{2s-2})$ . Mais, le changement de variable  $y = 3x/2$  permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(4Y^{2s-2} \exp(-Y)) &= 2 \int_0^{+\infty} x^{2s-2} \exp(-3x/2) dx \\ &= (4/3) \times (2/3)^{2s-2} \int_0^{+\infty} x^{2s-2} \exp(-x) dx \\ &= 2(2/3)^{2s-1} \mathbf{E}(X^{2s-2}). \end{aligned}$$

Nous nous attendons donc à ce que la nouvelle écriture conduise à un intervalle de confiance plus petit.

Mettre en place une fonction `gammamc2(n,s)` permettant de calculer  $\Gamma(s)$  à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo fondée sur la loi de  $Y$ . Accompagner les résultats d'un intervalle de confiance et comparer aux résultats du premier cas.

### 3.3 La Fonction $\beta$

On appelle fonction  $\beta$ , la fonction de deux variables définie par:

$$\forall s, t \geq 0, \beta(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx.$$

Il serait possible de démontrer par un changement de variable (non trivial) que:

$$\forall s, t \geq 0, \beta(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}.$$

D'un point de vue probabiliste,  $\beta(s, t)$  peut s'écrire:  $\mathbf{E}(U^{s-1}(1-U)^{t-1})$ ,  $U$  désignant une v.a. de loi uniforme sur  $]0, 1[$ .

Mettre en place une fonction `betamc(n,s,t)` permettant de calculer une valeur approchée de  $\beta(s, t)$  à partir de la réalisation d'un  $n$ -échantillon de loi uniforme sur  $]0, 1[$ . Accompagner l'approximation obtenue de l'écart-type empirique, et comparer le résultat à la valeur théorique (utiliser la fonction `beta` codée sous Scilab).

Que se passe-t-il pour les petites valeurs de  $s$  et  $t$ ? Tester par exemple le cas où  $s = .2$  et  $t = .9$ .

L'explication est simple et repose à nouveau sur le carré de la variable  $U^{s-1}(1-U)^{t-1}$ . Remarquons que son espérance s'écrit:

$$\mathbf{E}(U^{2s-2}(1-U)^{2t-2}) = \int_0^1 x^{2s-2}(1-x)^{2t-2} dx.$$

Pour  $s = 0.2$ , l'intégrale ci-dessus diverge au voisinage de zéro. Autrement dit, la variable  $U^{s-1}(1-U)^{t-1}$  n'est pas de carré intégrable: l'estimation donnée par le théorème central limite ne s'applique pas, et l'intervalle de confiance correspondant perd tout son sens. En répétant l'appel de la fonction `betamc`, nous constatons en effet de grandes fluctuations dans le calcul de l'écart type empirique, comparables à celles observées lors de l'application de la loi des grands nombres à la loi de Cauchy. Nous remarquons aussi des fluctuations sensibles dans le calcul de la moyenne empirique.

De fait, nous cherchons une autre écriture de  $\beta(s, t)$ .

En remarquant que la fonction  $f : x \in \mathbf{R} \mapsto sx^{s-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$  est une densité, nous écrivons  $\beta(s, t)$  sous la forme:

$$\beta(s, t) = s^{-1}\mathbf{E}((1-V)^{t-1}), \quad (\star)$$

où  $V$  est une variable aléatoire de densité  $f$ . Deux questions se posent: d'une part la variable  $(1-V)^{t-1}$  est-elle de carré intégrable, et d'autre part sommes

nous capables de mettre en place la méthode de Monte-Carlo pour une telle écriture ?

La réponse à la première question est simple:

$$\mathbf{E}((1 - V)^{2t-2}) = s^{-1} \int_0^1 (1 - x)^{2t-2} x^{s-1} dx.$$

Autrement dit, pour  $t > 1/2$ , la variable est bien de carré intégrable, même pour  $s$  petit. Nous pouvons donc traiter le cas  $s = 0.2$  et  $t = 0.9$ .

Pour la deuxième question, il s'agit de simuler  $V$  par inversion de sa fonction de répartition.

Nous sommes donc en mesure de mettre en place la méthode de Monte-Carlo à partir de la forme  $(\star)$ .

1. Mettre en place une fonction `simul2(n,s)` permettant de simuler, pour  $s > 0$ , un  $n$ -échantillon de même loi que  $V$ .
2. En déduire une fonction `betamc2(n,s,t)` permettant de calculer une valeur approchée de  $\beta(s,t)$  à partir d'un  $n$ -échantillon de même loi que  $V$ . Accompagner le résultat d'un intervalle de confiance.
3. Tester la fonction `betamc2(n,s,t)` sur l'exemple suivant:  $s = 0.2, t = 0.9$ . Comparer ce résultat à ceux obtenus par la première méthode.
4. Comment faire dans le cas  $s = 0.9$  et  $t = 0.2$ ?
5. Notre méthode permet-elle de traiter le cas  $s = 0.3$  et  $t = 0.2$ ?

## 4 Projet 4: Premier temps de sortie en dimension 1

On se propose ici de déterminer le premier temps de sortie moyen d'une particule de gaz qui diffuse librement dans un tuyau de longueur  $L$ . Pour cela on se ramène à un problème de dimension 1 (on néglige la section du tuyau) et on considère que la particule de gaz a la dynamique suivante: si  $x(t)$  est sa position à l'instant  $t$ , on pose:

$$\begin{aligned} dx(t) &= \sqrt{2D}dW_t \\ x(t_0) &= \frac{L}{2} \end{aligned}$$

où  $D$  est la constante (réelle positive) de diffusion de la particule et où  $dW_t$  est un incrément Brownien. Nous n'entrerons pas dans les détails mais cela signifie que, pour un pas de temps  $dt$ , on a:

$$x(t + dt) = x(t) + \sqrt{2D}u(dt)$$

où  $u(dt)$  est la réalisation d'une loi normale de variance  $dt$ :  $u \sim \sqrt{dt}\mathcal{N}(0,1)$  avec  $\mathcal{N}(0,1)$  la loi normale centrée réduite usuelle.

Calculer empiriquement (1,000 réalisations) le premier temps de sortie moyen de la particule  $\tau = \mathbf{E}(t_s)$  où  $t_s = \inf\{t/x(t) = 0 \text{ ou } L\}$ . On prendra les paramètres suivant  $L = 20$ ,  $D = 1$ . Donner un intervalle de confiance à 99% pour le temps de sortie calculé (on prendra la variance empirique dans la formule de l'intervalle de confiance).

On peut démontrer que  $\tau = u(\frac{L}{2})$  où  $u(x)_{0 \leq x \leq L}$  est solution de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} D \frac{d^2 u(x)}{dx^2} &= -1 \text{ pour } 0 < x < L, \\ u(0) &= u(L) = 0. \end{aligned}$$

Vous comparerez ce résultat théorique avec l'espérance empirique obtenue avec vos simulations.

## 5 Projet 5: Méthode des moments

On se propose ici de mettre en place une méthode non paramétrique classique qui est la méthode des moments ou *moment matching*. Le principe est assez simple, on se donne une série de données qui suivent une loi aléatoire inconnue et on veut "coller" une de nos lois connues à cette série empirique de données. Pour ce faire, nous égalisons les 2 ou 3 premiers moments empiriques avec ceux de la loi que l'on se donne.

Ici nous allons tricher un peu, nous allons nous donner comme données "empiriques" (sensées suivre une loi sous-jacente inconnue) 1000 réalisations d'une loi de Weibull de densité:

$$f_c(x) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} \mathbf{1}_{x>0}$$

avec  $\lambda$  et  $c$  deux réels fixés strictement positifs. Nous prendrons  $\lambda = 2$  et  $c = 3$ . Dans un premier temps, il vous faut donc construire une fonction *simu-weibull*( $n$ ) qui renvoie  $n$  réalisations d'une loi de Weibull (vous pourrez utiliser la méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition).

Maintenant, nous abordons la méthode des moments proprement dite. Nous nous donnons deux lois: la loi normale classique  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  d'espérance  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$  et la loi de Gumbel, de densité  $f(x) = e^{-e^{-\frac{\alpha-x}{\beta}}}$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux paramètres réels,  $\beta$  étant strictement positif. Déterminer les paramètres de ces lois tels que les 2 premiers de leurs moments soient égaux à ceux obtenus empiriquement par simulation de la loi de Weibull.

Tirer 1,000 réalisations des lois normales et de Gumbel obtenues (simulateur *scilab* ou inversion de la fonction de répartition) et comparer les histogrammes obtenus avec celui de la loi de Weibull initiale. Commentez.