Devoir Maison 2

A rendre pour le jeudi 10 Avril 2008

1 Exercice 1

Un circuit électrique est composé de n composants neufs montés en série de sorte que le circuit tombe en panne dès qu'un des composants tombe en panne. Soit X_i la variable aléatoire réelle représentant la durée de vie du composant i et X celle représentant la durée de vie du circuit. Les X_i sont indépendantes.

1. Ecrire une relation entre X et les X_i, $1 \leq i \leq n$
2. On appelle F_i, $1 \leq i \leq n$ les fonctions de répartition des X_i. Montrer que si F est la fonction de répartition de X, on a :
$$\forall x \in \mathbf{R}, F(x) = 1 - \prod_{i=1}^{i=n} (1 - F_i(x))$$
3. On suppose maintenant que les X_i, $1 \leq i \leq n$, sont i.i.d. suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer <u>proprement</u> la loi de X, et calculer son espérance et sa variance.

2 Exercice 2

On dit que X suit la loi $\Gamma(a, \theta)$ où a et θ sont des paramètres srictement positifs si X a pour densité f :

$$f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

où $\Gamma(a)$ est la fonction gamma d'Euler :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

On démontre en particulier que : $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

On dit que Y suit la loi $\beta(a,b)$ où $a, b > 0$ sont des paramètres réels si Y admet la densité g :

$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{\{0<x<1\}}$$

1. On considère à présent le couple de va réelles $(S,Z) = (X+Y, \frac{X}{X+Y})$ où X et Y sont indépendantes distribuées respectivement suivant les lois $\Gamma(a,\theta)$ et $\Gamma(b,\theta)$. Déterminer la loi du couple (S,Z) et montrer que S et Z sont deux variables aléatoires indépendantes distribuées respectivement suivant les lois $\Gamma(a+b,\theta)$ et $\beta(a,b)$.

2. Montrer que si $V \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors V^2 suit la loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Déduire des deux questions précédentes, par récurrence, la loi du khi 2 à n degrés de liberté $\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ où $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ sont des variables normales centrées réduites indépendantes.

3 exercice 3

Chaque jour dans une certaine ville, 100 personnes ont besoin d'un examen radioscopique. Elles ont à leur disposition n centres ($n \geq 1$) et chacune des 100 personnes choisit aléatoirement un de ces centres et cela indépendamment du choix des 99 autres. Soit N le nombre de clients journaliers d'un de ces centres.

1. Quelle est la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse ce centre en particulier ?

2. Montrer que $N = \sum_{i=1}^{100} X_i$, où les X_i suivent une loi de bernoulli de pramètre p que l'on déterminera.

3. En déduire la loi de N.

4. On donne que si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbf{P}\{|Y| \leq 2\} = 98\%$. En utilisant le théorème de la limite centrale, déterminer la capacité $c(n)$ que chaque centre doit avoir pour pouvoir répondre à la demande avec une probabilité de 98%. Donner $c(1)$, $c(2)$, $c(3)$ et $c(4)$.

Question subsidiaire : Quelle est le cout de la concurrence : quelle surcapacité $s(n)$ engendre la concurrence par rapport à une situation où chaque centre se verrait affecter un meme nombre de clients ? Calculer $s(1), s(2), s(3)$ et $s(4)$.

4 Exercice 4

Soit $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières i.i.d. et soit N une variable aléatoire à valeurs entières indépendantes des X_i. On définit la variable aléatoire réelle Z telle que :

$$Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

1. Calculer la fonction génératrice de Z.
2. En déduire son espérance et sa variance (on supposera que Z admet un moment d'ordre 2).
3. On suppose que le nombre d'accidents en une semaine dans une usine est une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. Le nombre d'individus blessés dans chaque accident suit lui une autre variable aléatoire de moyenne ν et de variance τ^2. On suppose que le nombre d'accidentés à chaque accident est indépendant du nombre d'accidents. Calculer la moyenne et la variance du nombre d'individus blessés par semaine.