

Devoir maison 1

L3 Maths Appliquées
lagache@biologie.ens.fr

A rendre pour le jeudi 21/02/2008

1 Exercice 1: Variables aléatoires discrètes

On réalise une succession de parties indépendantes où la probabilité de gagner est $0 < p < 1$.

1. On joue n fois et on note X le nombre de parties gagnées. Donner la loi de X .
2. On fixe r un entier positif ou nul et on note Y le nombre de parties nécessaires pour remporter r succès. Donner la loi de Y .
3. Soit X_n une suite de variables aléatoires, de même loi que X mais où $p = p_n$, tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer qu'alors, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{X_n = k\}$ existe et que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

2 Exercice 2: Formule de Bayes

Quand vous téléphonez entre 18h et 19h chez Pierre, vous avez 9 chances sur 10 de tomber sur son répondeur. Quand Pierre s'absente, il branche toujours son répondeur, mais même quand il est présent, il oublie de l'éteindre 2 fois sur 3.

1. Calculer la probabilité que Pierre soit chez lui entre 18h et 19h.
2. Vous appelez chez Pierre entre 18h et 19h et tombez sur son répondeur. Quelle est la probabilité que Pierre soit quand même présent?

3 Exercice 3: Lois Continues

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Quelle est la loi de $Y = \ln(X)$?

4 Exercice 4: Formule de Bayes

Pour dépister une maladie, on applique un test sanguin. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut que le test donne un résultat positif alors que le patient est sain; cela se produit dans $p = 2\%$ des cas. La proportion de personnes malades dans la population soumise

au test est de 0.1%. Quelle est la probabilité pour qu'un patient soit en bonne santé sachant que le résultat de son test est positif? Quelle devrait être la valeur de p pour que cette probabilité soit inférieure à 1%?

5 Exercice 5: Lois Continues

Au cours d'un jeu télévisé, un candidat tire au sort entre 2 enveloppes contenant respectivement les sommes x_1 et x_2 ($x_1 > x_2 > 0$) qu'il ne connaît pas. Après avoir examiné le contenu X de son enveloppe, le candidat a le choix entre conserver ce contenu ou bien changer d'enveloppe. Pour ce faire, le candidat (un peu matheux..) adopte la stratégie suivante: il considère une variable T indépendante du tirage au sort et suivant une loi exponentielle de paramètre 1; il applique ensuite l'algorithme suivant: si $T > X$ alors il change d'enveloppe et sinon, il conserve celle qu'il a tirée. Calculer la probabilité que le candidat, appliquant cette stratégie, gagne la somme la plus élevée x_1 . Est-elle inférieure ou supérieure à $\frac{1}{2}$? Etait-ce prévisible?