

Feuille de TD n° 6 : Dérivation

Exercice 1.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite l finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Montrer de plus que si f est périodique, elle est alors constante.

Exercice 2.

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ et $g(x) = x \sin(x) \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 3.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$. On définit g sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ f(2x-1) & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

g est-elle continue ? dérivable ? Sinon quelle hypothèse faut-il rajouter pour que ce soit le cas ?

Exercice 4.

Etudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Exercice 5.

Soit f une fonction dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Réciproquement, si la limite précédente existe, peut-on dire que f est dérivable en x_0 ?

Théorème de Rolle et Accroissements finis

Exercice 6.

Soit f une fonction C^1 sur $[0, 1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq mx$.

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que $\lim_{+\infty} f' = l$. Montrer que $l = 0$.

Exercice 8.

On appelle polynôme de Legendre les polynômes $P_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

- Calculer le degré de P_n et son coefficient dominant (par récurrence...).
- Montrer que P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $] -1, 1[$. (On procèdera par récurrence sur $Q_p = ((X^2 - 1)^n)^{(p)}$)

Exercice 9.

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une continue, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $d \in]0, +\infty[$ tel que $f'(d) = 0$.

Exercice 10.

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

- Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$ (on appliquera le théorème de Rolle à la fonction $h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$)
- En déduire que si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l$.
- Application : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$

Dérivées Successives

Exercice 11.

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

- Montrer que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
- Montrer que f est C_∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x) = (x - a)^n(x - b)^n$ avec a, b deux réels. En étudiant le cas $a = b$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

Exercice 13.

Calculer la dérivée n -ième des fonctions suivantes :

$$u(x) = x^2 \sin(x), f(x) = x^{n-1} \ln(1+x). \quad (5)$$