

Feuille de TD n° 4

Exercice 1.

Déterminer lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels et en donner une base

- $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = x + y + z = 0\}$.
- $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 - z^2 = 0\}$.
- $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 3z = 0\}$.
- $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z(x^2 + y^2) = 0\}$.

Exercice 2.

Déterminer si les familles suivantes sont linéairement indépendantes de la manière la plus simple possible :

- 1) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 2) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 3) $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 2)$, $v_3 = (1, -2, 1)$ et $v_4 = (-1, 2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 4) $v_1 = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $v_3 = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 3.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

- 1) v_1 et v_2 sont-ils colinéaires ? De même avec v_1 et v_3 , puis avec v_2 et v_3 .
- 2) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle linéairement indépendante ?

Exercice 4.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : (e_1, e_2, e_3, e_4) . Les familles suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

- 1) $(e_1, 2e_2, e_3)$, 2) (e_1, e_3) , 3) $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$, 4) $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.

Exercice 5.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on considère :

$v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.

À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Exercice 6.

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

- 1) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 1, -1)$
- 2) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 0, -1)$, $v_3 = (1, 8, 13)$
- 3) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 10, -11)$

Exercice 7.

Soient les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, -2, 3, -4)$ de $\mathbb{R}^4$.

- 1) Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \langle e_1, e_2 \rangle$?

2) Idem pour que $(x, 1, 1, y) \in \langle e_1, e_2 \rangle$?

Exercice 8.

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.

Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille linéairement indépendante engendrant le même sous-espace.

Exercice 9.

Déterminer le rang des familles suivantes :

- 1) $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 2)$, $(3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 2) $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
- 3) $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(2, 1, 2, 1, 2)$, $(1, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
- 4) $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
- 5) $(2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $(-1, 1, -2, 2, -3, 3)$, $(1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Indication : on commencera par extraire de la famille une base de l'espace qu'elle engendre.

Exercice 10.

Déterminer selon les valeurs de $t \in \mathbb{R}$, le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (1, 0, t)$, $u_2 = (1, 1, t)$ et $u_3 = (t, 0, 1)$.

Exercice 11.

Déterminer pour quels réels a , b et c , les vecteurs $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ et $(1, c, c^2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12.

Déterminer une base des sous-espaces définis par les équations suivantes :

- 1) Dans $\mathbb{R}^2$,
$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$
- 2) Dans $\mathbb{R}^3$, $2x - 3y + z = 0$
- 3) Dans $\mathbb{R}^3$,
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$
- 4) Dans $\mathbb{R}^3$,
$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$
- 5) Dans $\mathbb{R}^4$,
$$\begin{cases} x + y + 5t = 0 \\ x + 2y - z + 7t = 0 \\ -x + 3y - 4z + 3t = 0 \end{cases}$$