Polynômes

lagache@biologie.ens.fr

08 Octobre 2009

1 Polynômes

1.1 Exercice 1

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 12X + 8$.

- Démontrer que -2 est une racine d'ordre 2 pour P.
- Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$
- Déduire les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$

1.2 Exercice 2

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + 1$.

- Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
- Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$
- En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

1.3 Exercice 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X+1)(X+2)$ divise $P(X) = (X+1)^{2n} + (X+2)^n - 1$.

1.4 Exercice 4

Déterminer $P(X)$, polynôme de degré 3 tel que $P(-1) = -18$ et tel que divisé par $(X-1)$, $(X-2)$ ou $(X-3)$, le reste est toujours égal à 6.

1.5 Exercice 5

Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants:

- $P(X) = X^4 + 1$
- $P(X) = X^4 + X^2 + 1$

1.6 Exercice 6

Déterminer les réels p et q pour que le polynôme $Q = X^2 + 3X - 1$ divise $P = X^3 + pX + q$.

1.7 Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que le polynôme $P_n = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} \ldots + \frac{X^n}{n!}$ n'a pas de racines multiples.

1.8 Exercice 8

Soit le polynôme $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X - 6$.

- On se propose de démontrer que P n'a pas de racine double.
    1. Effectuer la division euclidienne de $2P$ par $\frac{1}{2}P^{'}$. On note R le reste de cette division.
    2. Effectuer la division euclidienne $\frac{1}{2}P^{'}$ par R. On note T le reste de cette division.
    3. Démontrer que si a est racine double de P, alors a est racine de R et T.
    4. En déduire que P n'a pas de racine double
- On se propose de factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$
    1. On pose $X = Y + 1$ et $Q(Y) = P(Y + 1)$. Calculer $Q(Y)$.
    2. Calculer les racines de Q dans $\mathbb{C}$. En déduire les racines de P dans $\mathbb{C}$.
    3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

1.9 Exercice 9

Soit λ un réel strictement positif tel que le polynôme $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait une racine double. Quelle est alors l'autre racine de P

1.10 Exercice 10

Déterminer tous les polynômes P tels que $(X^2 + 1)P^{''} - 6P = 0$ et $P(1) = 2$.

1.11 Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser le polynôme

$$P_n = 1 - X + \frac{X(X-1)}{2!} - \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)}{n!}$$