Ensembles et Fonctions

lagache@biologie.ens.fr

06 Octobre 2009

1 Ensembles et Fonctions

1.1 Exercice 1

Montrer par récurrence que pour tout n entier positif: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.2 Exercice 2

Soient a, b, c, d quatre "objets" distincts. Soit $X = \{a, b, c, d\}$. Soit $f : X \to X$ définie par: $f(a) = d, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = a$.

1. f est-elle injective, surjective, bijective?
2. Quels sont les ensembles $f(\{a, b, c\}), f(\{b, d\})$ et $f(\{a, d\})$
3. Quels sont les ensembles $f^{-1}(\{a\}), f^{-1}(\{b\})$ et $f^{-1}(\{a, c, d\})$

1.3 Exercice 3

Déterminer s'il existe des fonctions f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que:

- f n'est pas injective mais $g \circ f$ est injective
- g n'est pas injective mais $g \circ f$ est injective
- f n'est pas surjective mais $g \circ f$ est surjective
- g n'est pas surjective mais $g \circ f$ est surjective

1.4 Exercice 4

Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$
3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto 2n$

4. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 2z$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 7$
6. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + 7$
7. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto Re(z) + Im(z)$
8. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto iRe(z) + Im(z)$

1.5 Exercice 5

Pour chacune des applications suivantes, montrez qu'elle est bijective en trouvant son application réciproque et en démontrant que c'est vraiment son application réciproque.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 2\bar{z} + 1$
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto 4e^x$
4. $f : [0, 5] \to [0, 3\sqrt{5}]$, $x \mapsto 3\sqrt{x}$

1.6 Exercice 6

Soit $f : E \to F$. Pour toute partie A de E, on pose $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$, autrement dit $f(A)$ est l'ensemble des images par f de A.

- Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \bigcap B) \subset f(A) \bigcap f(B)$
- On suppose de plus que f est injective. Montrer qu'alors $f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$
- Donner un exemple pour lequel le point 1 n'est pas une égalité

1.7 Exercice 7

Soit $f : E \to F$. Pour toute partie A de F, on pose $f^{-1}(A) = \{x \in E|f(x) \in A\}$, autrement dit $f^{-1}(A)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de A.

- Montrer que pour toutes parties A et B de F, on a $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$
- Montrer que pour toutes parties A et B de F, on a $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$
- Montrer que pour toute partie A de F, on a $C_E f^{-1}(A) = f^{-1}(C_F A)$