Nombres Complexes

lagache@biologie.ens.fr

14 Septembre 2009

1 Notations Algébriques et Exponentielles

1.1 Exercice 1: Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \frac{3+6i}{4-4i},\ z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i},\ z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

1.2 Exercice 2: Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \frac{3}{1-i},\ z_2 = \frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1-i)^2},\ z_3 = \frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{1-i}.$$

1.3 Exercice 3

Soient θ et θ' deux nombres réels.

1. En factorisant par $e^{i(\theta+\theta')}$, mettre $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ sous la forme $\rho e^{i\theta_0}$ où ρ et θ_0 sont deux réels.

2. En utilisant le résultat précédent, mettre les nombres complexes suivant sous forme exponentielle: $z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i4\frac{\pi}{3}} - 1$.

1.4 Exercice 4:

Soit n un entier naturel non nul. Simplifiez les nombres complexes suivants:

$$z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n,\ z_2 = \left(\left(\sqrt{3}-1\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^n + \left(\left(\sqrt{3}-1\right) - i\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^n.$$

1.5 Exercice 5:

Démontrez que pour tous u et v complexes,

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u| + |v|\right)$$

2 Racines n^{iemes} et Equations Polynomiales

2.1 Exercice 6:

Déterminez les racines carrées de $9+40i$ et les racines quatrièmes de $-7-24i$.

2.2 Exercice 7

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes

$$u = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}},\ v = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^6 = u$ et $z^4 = v$.

2.3 Exercice 8: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$z^5 = 1,\ z^7 = 1+i\sqrt{3},\ \text{et } z^6\bar{z} = 1.$$

2.4 Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$z^2 - (2+3i)z + 3i - 1 = 0$$

2.5 Exercice 10: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation:

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1$$

3 Application à la trigonométrie

3.1 Exercice 11

Mettre sous forme trigonométrique $u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$ et $v = 1-i$. En déduire une représentation trigonométrique de $\frac{u}{v}$ et les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$.

3.2 Exercice 12:

Linéariser $cos^2(x)sin^2(x)$ et $cos^5(x)sin(x)$.

3.3 Exercice 13:

Pour n entier naturel, exprimer $cos(nx)$ et $sin(nx)$ en fonction des puissances de $cos(x)$ et $sin(x)$.

3.4 Exercice 14:

Pour $\theta \in]0, \pi[$, calculer $S = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k sin(k\theta)$.