

Exercices d'entraînement

lagache@biologie.ens.fr

17 Décembre 2009

Exercice 1

Factoriser au maximum dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + 1$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $P(X)$ par $X + 2$.

Exercice 2

On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère la famille de vecteurs $(v_i)_{i=1}^5$ donnée par: $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$ et $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.

1. à quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous espace $E = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$?
2. en déduire une équation cartésienne de E
3. quelle est la dimension de E ? En extraire une base parmi $(v_i)_{i=1}^n$.

Exercice 3

Résoudre le système dans $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Montrer que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n(1/x)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
- Montrer que f est C_∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

- en déduire que la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{n} - 1$
- en déduire que u_n diverge
- *question de recherche*: adapter ce raisonnement pour montrer que la suite $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge.

Problème

On souhaite étudier la suite u_n définie par:
$$\begin{cases} u_0 \in [1; +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 7u_n}{2}} - 1 \end{cases} \cdot \text{ Pour}$$

cela on introduit la fonction $\forall x \geq 1, f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 7x}{2}} - 1$

1. Dresser le tableau de variations de f et calculer ses éventuels points fixes.
2. En remarquant que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$, étudier la suite pour $u_0 \in [1, 2]$.
3. Que se passe-t-il si $u_0 > 2$?
4. *question de recherche*: Que se passe-t-il si $u_0 < 1$?