

Contôle continu 2

lagache@biologie.ens.fr

15 Décembre 2009

1 Algèbre (10 points)

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la dimension et une base du sous espace défini par $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$
2. Donner l'équation du plan affine F' parallèle à F passant par $A(1, 1, 1)$.

Soient les vecteurs $u_1(1, 0, 1)$, $u_2(1, 1, 1)$, $u_3(0, 1, 0)$ et $u_4(1, 2, 1)$.

1. Quelle est la dimension de $E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$?
2. Extraire une base de E parmi u_1, u_2, u_3, u_4 .
3. Donner une équation cartésienne de E .

2 Fonctions (10 points)

2.1 Exercice 1 (5 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0, f(x) = x\sqrt{x}$ et $\forall x \leq 0, f(x) = 0$. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$? C^2 ?

2.2 Exercice 2 (5 points)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a; b]$ et deux fois dérivable sur $]a; b[$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$g(b) = g(a) + (b - a)g'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}g''(c).$$

On introduit pour cela la fonction $\phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\phi(x) = g(x) - (x - a)g'(a) - \frac{(x - a)^2}{2}A$ où A est le réel tel que $g(b) = g(a) + (b - a)g'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}A$.

1. En appliquant le théorème de Rolle à ϕ sur $[a, b]$, montrer qu'il existe $u \in]a; b[$ tel que $\phi'(u) = 0$
2. Conclure en appliquant le théorème de Rolle à ϕ' sur $[a, u]$.